Analiza funkcjonalna

Lista 4 (topologia przestrzenii Banacha, operatory liniowe)

Zad 1. Sprawdzić, czy podzbiór M przestrzeni Banacha X jest otwarty, domknięty lub ograniczony.

	X	M		X	M
a)	$C[-5,1]$	$\{x : x(0) = 0\}$	h)	$C[0,1]$	$\{x : \int_0^1 x(t)dt = 0\}$
b)	$C^{(1)}[-3,3]$	$\{x : x(0) = x(1)\}$	i)	$C[0,1]$	$\{x : \int_0^1 x(t)dt < 1\}$
c)	ℓ_∞	$\{x : \sup_{k\in\mathbb{N}} \lvert x(k)\rvert < 1\}$	j)	ℓ_∞	$\{x : \exists_n \forall_{k>n} x(k) = 0\}$
d)	ℓ_∞	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}} \lvert x(k)\rvert < 1\}$	k)	$L_1[0,1]$	$\{x \in C([0,1]) : \max_{t\in[0,1]} \lvert x(t)\rvert < 1\}$
e)	c_0	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}} \lvert x(k)\rvert < 1\}$	l)	ℓ_1	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x(k)\rvert^2 \le 1\}$
f)	ℓ_2	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}} x(k) > 0\}$	m)	ℓ_p	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \le 1 \wedge \forall_{k\in\mathbb{N}} x(k) \ge 0\}$
g)	ℓ_1	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}} \lvert x(k)\rvert \le \frac{1}{k}\}$	n)	ℓ_p	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) = 1 \wedge \forall_{k\in\mathbb{N}} x(k) \ge 0\}$

Zad 2. Wykazać, że

a) zbiór $A = \{x \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \le 1\}$ jest domknięty i ma puste wnetrze w przestrzeni ℓ_2,

b) ℓ_1 jest zbiorem I kategorii w przestrzeni ℓ_2.

Zad 3. Wykazać, że jeżeli przestrzeń Banacha X posiada bazę Shaudera, to X jest ośrodkowa.

Zad 4. Uzasadnić, że przestrzenie c_0, c, l_p, gdzie $1 \le p < \infty$, są ośrodkowe.

Zad 5. Pokazać, że przestrzeń l_∞ nie jest ośrodkowa.

Zad 6. Niech $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_q)$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$. Wykazać, że norma operatora A

a) gdy $p = 1$ i $q = \infty$ wyraża się wzorem $\|A\| = \max_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|$,

b) gdy $p = q = \infty$ wyraża się wzorem $\|A\| = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,

c) gdy $p = q = 2$ szacuje się nierównościami

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\| \le \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}.$$

Zad 7. Obliczyć normy następujących operatorów liniowych działających na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zad 8. Niech $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ oraz $\|x\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)|$. Udowodnić, że

a) operator $\frac{d}{dt} : (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_1) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ jest operatorem ograniczonym i wyznaczyć jego normę.

b) operator $\frac{d}{dt} : (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ nie jest operatorem ograniczonym.